11/12/2017

Πρόταση Ιδιότητες Διαιρεμένων Διαφορών

Έστω $f \in C[a,b]$ και $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a,b]$ διαφορετικά μεταξύ τους.

i) Έστω $(i_0, i_1, \ldots, i_n)$ μια μετάθεση των $(0,1,2,\ldots,n)$ τότε $\Delta^n(x_0,x_1,\ldots x_n)(f) = \Delta^n(x_{i_0}, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})(f)$

ii) Αν $f \in \mathbb{P}_{n-1}$ τότε $\Delta^n(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)(f) = 0$

ii) Αν $f \in C^n[a,b]$ τότε $\Delta^n(x_0, x_1, \ldots, x_n)(f) = \dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$, $\xi \in (a', b')$

όπου $a' = \min\limits_{0 \le i \le n} \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $b' = \max\limits_{0 \le i \le n} \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.

Απόδειξη

i) $\Delta^n(x_0, x_1, \ldots, x_n)(f)$ είναι ο μεγιστοβάθμιος όρος του πολυωνύμου παρεμβολής $p \in P_n$ της f στα $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$. Το πολυώνυμο αυτό είναι μοναδικό και θα είναι το ίδιο με εκείνο που θα προκύψει από τα σημεία $x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$

ii) $\Delta^n(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)(f)$ είναι ο μεγιστοβάθμιος όρος του πολ. παρεμβ της f στα $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Αφού $f \in \mathbb{P}_{n-1}$ αυτή θα είναι και το πολ. παρεμβολής, Επομένως $\Delta^n(x_0, x_1, \ldots, x_n)(f) = 0$.

iii) Έστω $P_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$ το πολ. παρεμβολής της f στα $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$. Τότε από τον τύπο του σφάλματος,

$$\boxed{f(x) = P_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \cdot \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)} \quad (1)$$

Θεωρώντας το σημείο x_n και τον τύπο πολ. παρεμβολής του Νεύτωνα παίρνουμε:

$$f(x_n) = P_n(x_n) = P_{n-1}(x_n) + \Delta^n(x_0, x_1, \ldots, x_n)(f) \prod_{i=0}^{n-1} (x_n - x_i),$$

$\forall\, x_n \in [a,b]$. $x_n \neq x_i$

Θεωρώ x στη θέση του x_n.

$$f(x) = P_n(x) = P_{n-1}(x) + \Delta^n(x_0, x_1, \ldots, x_n) \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i) \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε ότι $\Delta^n(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}; x) =$

$$= \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \quad \xi \in (a', b')$$

Επανέρχομαι με x_n στη θέση του x, τότε

$$\boxed{\Delta^n(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}}$$

$$\Delta^1(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(\xi)$$ {Θ.Μ.Τ} Διαφορικού λογισμού

Παράδειγμα

	x_i	Δ^0	Δ^1	Δ^2	Δ^3
x_0	-1	2			
x_1	0	0	-2		
x_2	1	0	0	1	
x_3	2	8	8	4	1

$(2, 1, 0, -1)$

$$P_3(x) = \Delta^0(x_3)(f) + \Delta^1(x_3, x_2)(f)(x - x_2) + \Delta^2(x_3, x_2, x_1)(f)(x - x_2)(x - x_3)$$
$$+ \Delta^3(x_3, x_2, x_1, x_0)(f)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_1)$$
$$= 8 + 8(x-2) + 4(x-2)(x-1) + 1(x-2)(x-1)\cdot x$$
$$= 8 + 8x - 16 + 4x^2 - 12x + 8 + x^3 - 3x^2 + 2x$$
$$= x^3 + x^2 - 2x$$

Άσκηση

Να προσαρμοστεί πολυώνυμο το πολύ τρίτου βαθμού στον πίνακα τιμων:

x_i	-2	-1	1	2
f_i	-1	1	5	7

χρησιμοποιώντας οποιοδήποτε τύπο παρεμβολής.
Αν $f \in C^4[-2,2]$ και $\max\limits_{-2\le x\le 2} |f^{(4)}(x)| = 2$

Να βρεθεί ένα φράγμα για το μέγιστο απόλυτο σφάλμα, κατά την παρεμβολή.

x_i	Δ^0	Δ^1	Δ^2	Δ^3
-2	-1			
-1	1	2		
1	5	2	0	
2	7	2	0	0

Το πολυώνυμο θα είναι 1ου βαθμού.

$P(x) = -1 + 2(x+2) = 2x+3$ πολ. παρεμβολής

$$\max_{-2\le x\le 2} |f(x) - P(x)| \le \frac{1}{4!} \max_{-2\le x\le 2} |f^{(4)}(x)| \cdot \max_{-2\le x\le 2} |\phi(x)| \quad (1)$$

όπου $\phi(x) = (x+2)(x+1)(x-1)(x-2) = (x^2-1)(x^2-4) = x^4 - 5x^2 + 4$

$$\phi'(x) = 4x^3 - 10x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}$$ κρίσιμα σημεία.

$\phi(0) = 4$

$$\phi(\sqrt{10}/2) = \frac{100}{16} - 5\cdot\frac{10}{4} + 4 = \frac{25}{4} - \frac{50}{4} + \frac{16}{4} = -\frac{25}{4} + \frac{16}{4} = -\frac{9}{4}$$

$$\phi(-\sqrt{10}/2) = -\frac{9}{4}$$

$$\max_{-2\le x\le 2} |\phi(x)| = \max\left\{4, \frac{9}{4}\right\} = 4$$

Συνεπώς $(1) \Rightarrow \max\limits_{-2\le x\le 2} |f(x) - P(x)| \le \frac{1}{4!} \cdot 2 \cdot 4 = \frac{1}{3}$

Κεφάλαιο: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

<u>Πρόβλημα</u>: Έστω $f \in C[a,b]$ φραγμένη και ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Να προσεγγιστεί η τιμή $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$.

Εάν F είναι η παράγουσα συνάρτηση $(F'(x) = f(x))$ τότε $I(f) = F(b) - F(a)$.

Οι τύποι Αριθμητικής Ολοκλήρωσης παράγονται κυρίως αν ολοκληρώσουμε κάποια συνάρτηση παρεμβολής της f σε ένα σύνολο σημείων

Τύποι Αριθμ. ολοκλ. των Newton-Cotes.

Έστω $f \in C[a,b]$, γνωστή στα σημεία $x_0, x_1, \dots, x_n$, διαφορετικά μεταξύ τους.

Προσεγγίζουμε το $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ με $Q_{n+1}(f) = \int_a^b P_n(x)\,dx$,

$P_n \in \mathbb{P}_n$ το πολ. παρεμβολής της f στα $x_0, x_1, \dots, x_n$.

$$Q_{n+1}(f) = \int_a^b P_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} L_i(x) \cdot f(x_i)\,dx = \sum_{i=0}^{n} \int_a^b L_i(x)\,dx \cdot f(x_i).$$

Θεωρούμε: $x_0 = a$, $x_i = a + ih$, $h = \frac{b-a}{n}$

$$Q_{n+1}(f) = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i), \quad w_i = \int_a^b L_i(x)\,dx.$$